

恒常法により推定された閾値間の統計的有意差検定法

永井 岳大*・星野 崇宏**・内川 恵二*

* 東京工業大学 大学院 総合理工学研究科

〒 226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田町 4259-G2-1

** 東京大学 教養学部

〒 153-8902 東京都目黒区駒場 3-8-1

(受付：2006年4月8日；改訂稿受付・受理：2006年6月30日)

Statistical Significance Testing of Thresholds Estimated by Constant Stimuli Method

Takehiro NAGAI*, Takahiro HOSHINO** and Keiji UCHIKAWA*

*Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology
Nagatsuta-cho 4259-G2-1, Midori-ku, Yokohama, Kanagawa 226-8502

**College of Arts and Sciences, University of Tokyo
Komaba 3-8-1, Meguro-ku, Tokyo 153-8902

(Received 8 April 2006; Received in revised form and accepted 30 June 2006)

Statistically significant difference between multiple thresholds estimated from constant stimuli method on psychophysical experiments could not be tested by t -test and analysis of variance, because the thresholds are not defined as averages of samples but are estimated from a psychometric function fitted to the subject's response by maximum likelihood estimation and statistic needed for those statistical tests such as degree of freedom cannot be derived. We proposed a new statistical method to test the statistically significant difference between thresholds estimated from method of constant stimuli using the asymptotical normality of maximum likelihood estimator and the characteristic of multivariate normal distribution. This method can be used like analysis of variance for thresholds defined as the average of samples.

1. はじめに

心理物理学実験では、実験結果から閾値を推定する必要がある場合が多い。そして、様々な条件下で閾値が推定された後に、それらの閾値間に有意な差があるかどうか（すなわち、実験条件による効果があったかどうか）を調べることがよく行われる。その差の有無を調べる一つの方法として、統計的検定がよく用いられる。

このような統計的検定としてよく用いられるのが、 t -検定や分散分析である。これらは、複数の母集団平均間の差の有無（正確には、標本抽出分布平均間の差の有無）を、それらの標本

を用いて検定する方法である。どちらの方法でも、標本の平均値や分散などから必要な統計量（ t 値、 F 値、自由度など）を計算することにより検定を行う。心理物理学実験において、調整法では被験者が調整した刺激の値の平均値、階段法では各系列の折り返し点の平均値を閾値として定義し、毎回調整した刺激の値や折り返し点を母集団からの標本と考えることにより、 t -検定や分散分析によって閾値間の差に関する検定を行うことができる。

一方、心理物理学実験において精度良く閾値を推定する方法の一つに恒常法がある。恒常法でよく用いられる閾値の定義は、調整法や階段

法での標本を平均するという閾値の定義とは異なる。恒常法では、横軸に実験変数、縦軸に正答率を取り、その正答率の各点に累積正規分布やロジスティック回帰モデルなどの心理測定関数を当てはめ、ある正答率（50% などがよく用いられる）に対応する実験変数値を閾値と定義する。

このように定義された閾値は標本の平均値ではなく、標本から直接計算する必要がある自由度などの統計量を得ることができないため、各被験者の結果に対して t -検定や分散分析を行うことができない。この場合でも、被験者数が多ければ、恒常法により推定された各被験者の閾値を標本と考えることにより、全被験者間の平均閾値に対して t -検定や分散分析を行うことができる。実際にこの方法により有意差検定をしている文献¹⁻³⁾も多い。ところが、この方法では、各被験者内における有意差検定ができないこと、各被験者の閾値が一つの標本としてしか扱われておらず各被験者内の閾値推定の誤差が評価されていないこと、被験者により傾向が異なる場合などに顕著であるが、各被験者内では条件間に有意とされるべき差があるのに全被験者の結果をまとめて解析することにより条件間の差を検出できなくなる可能性があること、などの問題点がある。

そこで本論文では、恒常法によって推定された閾値間の差の有無を検定するための新たな統計的手法を提案する。本手法では、最尤推定量の漸近正規性により推定閾値が正規分布に従うことを仮定する。その仮定の下では複数の推定閾値間の差が多変量正規分布に従うため、多変量正規分布の性質を利用して閾値間の差を検定する。この多変量正規分布の性質を利用した点が本手法の大きな特徴である。本手法は、各被験者内で閾値間の有意差検定が行うことができ、閾値推定に使われた全てのデータを用いた検定であるという点において、前述した各被験者の閾値を標本として t -検定や分散分析を行う方法よりも優れていると考えられる。

2. 1 因子実験における複数の閾値間の有意差検定

本節では、1 因子実験において恒常法により推定された複数の閾値間の差の有無に関する統計的検定方法について述べる。この方法は標本の平均値と定義された閾値における 1 元配置分散分析に対応する。

2.1 帰無仮説と対立仮説

はじめに、この検定における帰無仮説と対立仮説について考える。恒常法により推定された n 個の閾値を $\hat{\boldsymbol{y}}=(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \dots, \hat{y}_n)$ 、それらの真の値を $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y, \dots, y_n)$ とする（以後、任意の値 z の推定値を \hat{z} と表すことにする）。ここで検定したいことは、複数の閾値の真値間の差の有無（すなわち、因子の効果の有無）である。したがって、帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は、

$$H_0: y_1=y_2=y_3=\dots=y_n \quad (1)$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

と表すことができる。

このに H_0 より直接閾値の差の有無を検定することは難しいので、新たな変数 $\boldsymbol{\gamma}$ を導入することにより(1)と等価でかつ検定が容易な H_0 を考える。 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1})$ の各要素を

$$\gamma_i=y_1-y_{i+1} \quad i=1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (2)$$

とおくと、式 (1) に示した帰無仮説と対立仮説は、

$$H_0: \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0} \quad (3)$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

と等価となる⁴⁾。

したがって、閾値の真値間の差の有無を検定するためには、式 (3) に示す H_0 が棄却されるか否かを判定すればよい。

2.2 $\hat{\boldsymbol{y}}$ が従う統計量

ここでは、検定に必要である $\hat{\boldsymbol{y}}$ が従う統計量について考える。

はじめに、各推定閾値 $\hat{y}_i (i=1, 2, \dots, n)$ が従う統計量を考える。1 節で述べたように、恒常法では、心理測定関数を被験者が応答した正答率に当てはめ、ある正答率に対応する実験変数値を閾値として定義する。このように定義された

閾値は当てはめた心理測定関数のパラメータ θ の関数として表現される。例えばロジスティック回帰モデルによる心理測定関数 $f(x)$ は、パラメータを θ_0, θ_1 として、

$$f(x) = \frac{\exp(\theta_0 + \theta_1 x)}{1 + \exp(\theta_0 + \theta_1 x)} \quad (4)$$

で与えられるが、50% 正答率に対応する閾値 x_{50} は、 θ_0 と θ_1 を用いて、 $x_{50} = -\theta_0/\theta_1$ として表される。そこで、閾値を推定するためには、心理測定関数が被験者の応答に当てはまるような $\hat{\theta}$ を推定しなければならないことになる。被験者の応答に心理測定関数を当てはめる方法としては最尤法がよく使われるが、最尤法で用いたデータ数が多ければ、心理測定関数の最尤推定パラメータ $\hat{\theta}$ (ロジスティック回帰モデルの例で言えば、 $\hat{\theta}_0$ と $\hat{\theta}_1$) は平均がパラメータの真値 θ 、分散共分散行列*が Σ_θ である多変量正規分布に漸近的に従うことが知られている²⁾。ただし、実際には Σ_θ は未知であるため、 $\hat{\theta}$ から推定される $\hat{\Sigma}_\theta$ を利用する⁵⁾。

ここで、閾値が心理測定関数のパラメータの関数として表現されることから、以下に示すデルタ法⁶⁾を使うことができる。デルタ法とは、漸近的に正規分布に従う複数の確率変数からなる関数の漸近正規性を利用し、その平均と分散を計算する方法である。したがって、デルタ法を使うことにより閾値が漸近的に従う正規分布の平均と分散を計算することができる。

定理 1 (デルタ法) $\hat{\theta}$ が漸近的に

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix} \sim N \left[\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}, \Sigma_\theta \right] \quad (5)$$

であるとする。ただし、 N は正規分布、 Σ_θ は分散共分散行列であり、「 \sim 」は左辺が右辺の確率分布に従うことを示す。このとき、 $\hat{\theta}$ の関数 $\mathbf{g}(\hat{\theta}) = [g_1(\hat{\theta}), g_2(\hat{\theta}), g_3(\hat{\theta}), \dots, g_q(\hat{\theta})]^t$ (ただし、

$q < p$) は漸近的に

$$\mathbf{g}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} g_1(\hat{\theta}) \\ g_2(\hat{\theta}) \\ \vdots \\ g_q(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \sim N \left[\begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ \vdots \\ g_q(\theta) \end{bmatrix}, \mathbf{G}\Sigma_\theta\mathbf{G}^t \right] \quad (6)$$

となる。ただし、 \mathbf{G} は q 行 p 列の行列であり、各要素 G_{ij} は

$$G_{ij} = \left(\frac{\partial g_i(\theta)}{\partial \theta_j} \right)_{\theta=\hat{\theta}} \quad (7)$$

である。

すなわち、式(6)より、 $\mathbf{g}(\hat{\theta})$ の漸近平均は $[g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), \dots, g_q(\theta)]^t$ となり、漸近分散共分散行列 $\Sigma_{\mathbf{g}(\hat{\theta})}$ は

$$\Sigma_{\mathbf{g}(\hat{\theta})} = \mathbf{G}\Sigma_\theta\mathbf{G}^t \quad (8)$$

となる。

定理 1 より、心理測定関数の推定パラメータが漸近的に多変量正規分布に従うとき、そのパラメータの関数として表現される推定閾値 \hat{y}_i ($i=1, 2, \dots, n$) も漸的に平均 y_i 、分散 $\hat{\sigma}_i$ の正規分布に漸的に従うのである。ただし、 $\hat{\sigma}_i$ は式(8)により $\hat{\Sigma}_\theta$ から推定される ($\hat{\sigma}_i$ は式(8)の左辺 $\Sigma_{\mathbf{g}(\hat{\theta})}$ に対応する)。

各閾値 \hat{y}_i ($i=1, 2, \dots, n$) が正規分布に漸的に従っているので、 $\hat{\mathbf{y}}$ は平均 \mathbf{y} 、分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ の多変量正規分布に漸的に従う。ただし、 $\hat{\Sigma}_y$ は、話を簡単にするために各閾値が独立である場合を考えれば、

$$\hat{\Sigma}_y = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \hat{\sigma}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \hat{\sigma}_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる。

最後に、 $\hat{\mathbf{y}}$ が従う統計量について考える。式(2)に示すように、 $\hat{\mathbf{y}}$ は $\hat{\mathbf{y}}$ の関数として表現されるため、先ほどと同様にデルタ法によって、 $\hat{\mathbf{y}}$ が多変量正規分布に漸的に従うならば $\hat{\mathbf{y}}$ も多変量正規分布に漸的に従う。その多変量正規分布の平均は $\boldsymbol{\gamma}$ であり、分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ は式(8)により $\hat{\Sigma}_y$ から推定される。

*対角要素が各パラメータの分散、それ以外の (i, j) 要素が第 i パラメータと第 j パラメータの共分散である行列。

2.3 多変量正規分布の性質

2.2 項で、 $\hat{\boldsymbol{y}}$ が漸近的に $n-1$ 次元の多変量正規分布に従うことがわかったので、 $\hat{\boldsymbol{y}}$ が多変量正規分布に従うことを仮定して閾値間の差の検定を行うことにする。検定を行うにあたり、この多変量正規分布には次の重要な性質があることを確認しておく⁷⁾。

定理 2 (多変量正規分布の性質) 次元数 p の $\hat{\boldsymbol{y}}$ が、平均ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ 、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の p 次元多変量正規分布に従うとき、

$$(\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\gamma})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\gamma}) \quad (10)$$

は、自由度の χ^2 二乗分布に従う。

すなわち、 H_0 の下では $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ と仮定するので、定理 2 より $\hat{\boldsymbol{y}}^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}$ が χ^2 分布に従う。このことから、 $\hat{\boldsymbol{y}}^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}$ の値が自由度 $n-1$ の χ^2 分布の有意水準点よりも高ければ H_0 を棄却、低ければ H_0 を保持すればよいのである。

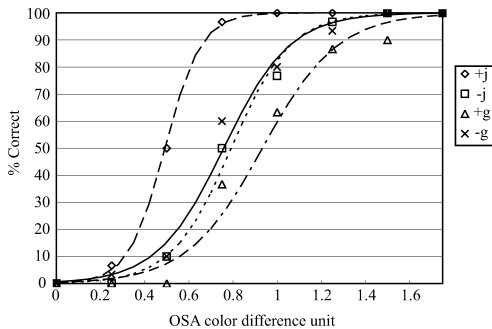


図 1 各条件の正答率とロジスティック回帰モデルによる心理測定関数のフィッティング結果。

2.4 まとめ

恒常法により推定された閾値間の差の検定方法をまとめると以下ようになる。

- 1.1 因子実験の結果に対して最尤法による解析を行い、閾値 $\hat{\boldsymbol{y}}$ とその分散共分散行列 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y$ を推定する (各推定閾値が独立であるならば、 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y$ の共分散は 0 となる)。このとき、 H_0 と H_1 は以下ようになる。

$$H_0: y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

2. 式(2)により $\hat{\boldsymbol{y}}$ を計算する。1. の H_0 は

$$H_0: \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$$

と等価である。また、その分散共分散行列 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y$ をデルタ法の式(8)により $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y$ から計算する。 $\hat{\boldsymbol{y}}$ が多変量正規分布に従うことを仮定する。

3. $\hat{\boldsymbol{y}}^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}$ を計算する。この値は H_0 の下では多変量正規分布の性質により自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うので、 χ^2 分布から p 値を計算する。
4. 3. で計算した p 値が有意水準よりも低ければ H_0 を棄却し (閾値間に有意な差がある)、高ければ H_0 を棄却しない (閾値間に有意な差があるとは言えない)。

2.5 検定例

恒常法によって推定された閾値間の検定例として、OSA 色空間内のある参照色から $\pm j$, $\pm g$ 方向への色弁別閾値を測定した実験例を示す。各条件 (色空間内の方向) における参照色とテスト色との色差、その色差における試行数と正答数を表 1 に、各条件の正答率とロジスティック

表 1 恒常法の実験結果の例 1 (架空データ)。

実験条件	+j		-j		+g		-g	
	試行数	正答数	試行数	正答数	試行数	正答数	試行数	正答数
0	30	0	30	0	30	0	30	0
0.25	30	2	30	0	30	0	30	1
0.5	30	15	30	3	30	0	30	3
0.75	30	29	30	15	30	11	30	18
1	30	30	30	23	30	19	30	24
1.25	30	30	30	29	30	26	30	28
1.5	30	30	30	30	30	27	30	30
1.75	30	30	30	30	30	30	30	30

表2 表1のデータから推定されたロジスティック回帰モデルのパラメータと閾値.

実験条件	+j		-j		+g		-g	
	推定値	分散	推定値	分散	推定値	分散	推定値	分散
$\hat{\theta}_0$	-6.004	1.335	-5.910	0.742	-5.474	0.532	-5.061	0.514
$\hat{\theta}_1$	12.204	5.069	7.466	1.084	5.863	0.556	6.676	0.794
($\hat{\theta}_0$ と $\hat{\theta}_1$ の共分散)		-2.504		-0.858		-0.518		-0.604
閾値	0.492	0.00066	0.792	0.00112	0.934	0.00143	0.758	0.00125

ク回帰モデルを心理測定関数とした場合のフィッティング結果を図1に示す. また, 各条件における実験データにフィッティングした心理測定関数のパラメータ $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$ とその分散, そして正答率 50% に対応する色差として定義された閾値とその分散を表2に示す. ロジスティック回帰モデルの場合, 推定したパラメータ $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$ により, 50% 閾値 \hat{y} は,

$$\hat{y} = -\frac{\hat{\theta}_0}{\hat{\theta}_1} \quad (11)$$

となり, その分散 $\hat{\sigma}$ は式(8)により,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{\theta}_1^4} (\hat{\theta}_1^2 \text{Var}(\hat{\theta}_0) - 2\hat{\theta}_0\hat{\theta}_1 \text{Cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) + \hat{\theta}_0^2 \text{Var}(\hat{\theta}_1)) \quad (12)$$

となる. ただし, $\text{Var}(\hat{\theta}_0)$, $\text{Var}(\hat{\theta}_1)$ はそれぞれ $\hat{\theta}_0$ と $\hat{\theta}_1$ の分散であり, $\text{Cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ は $\hat{\theta}_0$ と $\hat{\theta}_1$ の共分散である.

ロジスティック回帰モデルによる心理測定関数のフィッティングについては参考文献を参考にさせていただきたい⁸⁾. この例では心理測定関数としてロジスティック回帰モデルを用いたが, フィッティングに最尤法を用いれば, プロビットモデルやワイブルモデルなどを用いて推定した閾値に対して本手法により検定を行っても問題ない.

表1に示した閾値間の差の有無をこれまで述べた方法で検定する.

1. 各閾値が独立であると仮定すると, 閾値 \hat{y} と分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ は以下のとおりである.

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.492 \\ 0.792 \\ 0.934 \\ 0.758 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\hat{\Sigma}_y = \begin{bmatrix} 0.00066 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00112 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00143 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00125 \end{bmatrix} \quad (14)$$

2. 式(2)により \hat{y} から $\hat{\gamma}$ を計算すると,

$$\hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \\ \hat{y}_1 - \hat{y}_3 \\ \hat{y}_1 - \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.300 \\ -0.442 \\ -0.266 \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる. また, $\hat{\gamma}$ の分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_\gamma$ はデルタ法により計算するが, その計算に用いる G は式(7)により,

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_3} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_3} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial y_3} & \frac{\partial \gamma_3}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

となり, この G を用いて式(8)により $\hat{\Sigma}_\gamma$ を計算すると,

$$\hat{\Sigma}_\gamma = G \hat{\Sigma}_y G^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.00066 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00112 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00143 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0.00177 & 0.00066 & 0.00066 \\ 0.00066 & 0.00209 & 0.00066 \\ 0.00066 & 0.00066 & 0.00191 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。

3. 多変量正規分布の性質により自由度3の χ^2 値となる $\hat{\boldsymbol{y}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{y}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \hat{\boldsymbol{y}} &= [0.300 \quad -0.442 \quad -0.206] \\ & \times \begin{bmatrix} 0.00177 & 0.00066 & 0.00066 \\ 0.00066 & 0.00209 & 0.00066 \\ 0.00066 & 0.00066 & 0.00191 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} 0.300 \\ -0.422 \\ -0.206 \end{bmatrix} \\ & = 114.084 \end{aligned} \quad (18)$$

となり、さらに、自由度3の χ^2 分布表からこの値の値を調べると、

$$\hat{p} = 1.45 \times 10^{-24} \quad (19)$$

となる。

4. 有意水準が5%であるならば、 $p = 0.45 \times 10^{-24} < 0.05$ であるため H_0 を棄却する、すなわち、表1の実験条件 $\pm j, \pm g$ の閾値間には有意な差があると判定する。

3. 多因子実験における複数の閾値間の有意差検定

2節では、1因子実験における閾値間の有意差検定について述べた。本節では多因子実験において恒常法により推定された複数の閾値間の有意差検定の方法について述べる。この方法は完全無作為化多元配置分散分析に対応する。心理物理実験の場合は、因子とは閾値に差があるかどうかを調べたい実験条件の種類に対応する。多因子実験では、各因子の単独の効果（主効果）だけではなく、各因子間の交互作用も考慮する必要があるため、各因子の主効果と交互作用を別々に検定することになる。そこで、ここ

では2因子実験を例にして、まず各因子の主効果と因子間の交互作用の計算方法について述べ、次に2節と同様にデルタ法と多変量正規分布の性質を用いた主効果と交互作用の検定方法について説明する。

3.1 主効果と交互作用

3.1.1 記号の説明

はじめに記号の説明をする。2因子実験を例にして主効果と交互作用について述べるが、3因子以上の実験でも、主効果と交互作用の考え方は同じである。二つの因子をA, B, 各因子の水準数を m, n とし、恒常法によって推定された $m \times n$ 個の閾値を

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{1.1} & \hat{y}_{1.2} & \cdots & \hat{y}_{1.n} \\ \hat{y}_{2.1} & \hat{y}_{2.2} & \cdots & \hat{y}_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{m.1} & \hat{y}_{m.2} & \cdots & \hat{y}_{m.n} \end{bmatrix} \quad (20)$$

とする。水準とは各因子の実験条件のことであり、水準数とは各因子の実験条件数に対応する。このとき、 $\hat{\boldsymbol{y}}$ の真の値 \boldsymbol{y} の一般平均（全因子に関する平均）を μ 、Aの第 i 水準の \boldsymbol{y} のBに関する平均を $\mu_{i.}$ 、およびBの第 j 水準の閾値のAに関する平均を $\mu_{.j}$ とする。すなわち、 μ 、 $\mu_{i.}$ および $\mu_{.j}$ は

$$\mu = \frac{\sum_i \sum_j y_{i,j}}{m \times n} \quad (21)$$

$$\mu_{i.} = \frac{\sum_j y_{i,j}}{n} \quad (22)$$

$$\mu_{.j} = \frac{\sum_i y_{i,j}}{m} \quad (23)$$

となる。

3.1.2 各因子の主効果

各因子の主効果とは、他の因子に関する平均から一般平均を引いた値である。Aの第 i 水準の主効果を α_i とすると、

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu \quad (24)$$

のように表され、同様に、Bの第 j 水準の主効果を β_j とすると、

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu \quad (25)$$

と表される⁵⁾。

3.1.3 因子間の交互作用

交互作用とは、 $y_{i,j}$ のうち、主効果と一般平均だけでは表せない部分のことである。Aの*i*水準とBの*j*水準の交互作用を $(\alpha\beta)_{i,j}$ とすると、

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)_{i,j} &= y_{i,j} - (\alpha_{i\cdot} + \beta_{\cdot j} + \mu) \\ &= y_{i,j} - (\mu_{i\cdot} - \mu) - (\mu_{\cdot j} - \mu) - \mu \\ &= y_{i,j} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu \end{aligned} \quad (26)$$

と表される²⁾。

3.2 主効果の検定法

3.2.1 帰無仮説と対立仮説

因子Aの主効果について考える。Aの主効果がないということは、Aの各水準の主効果が0であるということである。したがって、因子Aの主効果を検定する際の帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は以下ようになる。

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0 \quad (27)$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

2節と同様に、式(27)と等価で検定が容易になる H_0 を導くために新たな変数を導入する。

$\gamma_A = (\gamma_{A1}, \gamma_{A2}, \gamma_{A3}, \dots, \gamma_{A(m-1)})$ の各要素を

$$\begin{aligned} \gamma_{Ai} &= \alpha_1 - \alpha_{i+1} = (\mu_{1\cdot} - \mu) - (\mu_{i+1\cdot} - \mu) \\ &= \mu_{1\cdot} - \mu_{i+1\cdot}, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (28)$$

とすると、 $\sum_i \alpha_i = 0$ である²⁾ことから、上記の帰無仮説と対立仮説は、

$$H_0: \gamma_A = 0 \quad (29)$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

と等価となる。したがって、Aの主効果の有無を検定するためには、式(29)の H_0 が棄却されるか否かを調べればよい。

3.2.2 検定方法

上記の帰無仮説を2節と同じ方法で検定すればよい。すなわち、 $\hat{\gamma}_A$ が多変量正規分布に従うことを仮定し、多変量正規分布の性質により H_0 の下では $\hat{\gamma}'_A \hat{\Sigma}_{\gamma_A}^{-1} \hat{\gamma}_A$ が自由度の χ^2 分布に従うことを用いて検定を行う。ただし、 $\hat{\Sigma}_{\gamma_A}$ は $\hat{\gamma}_A$ の分散共分散行列であるが、これはデルタ法により

\hat{y} の分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ から計算できる。

因子Aの主効果の検定方法をまとめると以下ようになる。

1. 閾値 \hat{y} とその分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ を推定する(2節と同様に、各閾値が独立であるならば、 $\hat{\Sigma}_y$ の共分散は0となる)。このとき、 H_0 と H_1 は以下ようになる。

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

2. $\hat{\gamma}_A$ を計算する。1.の H_0 は

$$H_0: \gamma_A = 0$$

と等価である。 $\hat{\gamma}_A$ の分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_{\gamma_A}$ をデルタ法に基づき計算する。 $\hat{\gamma}_A$ が多変量正規分布に従うことを仮定する。

3. $\hat{\gamma}'_A \hat{\Sigma}_{\gamma_A}^{-1} \hat{\gamma}_A$ を計算する。この値は多変量正規分布の性質により、 H_0 の下では自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従うので、 χ^2 分布から値を計算する。

4. 3.で計算した*p*値が有意水準よりも低ければ H_0 を棄却し(因子Aの主効果がある)、高ければ H_0 を棄却しない(因子Aの主効果があるとは言えない)。

因子Bの主効果に関する検定方法も全く同様である。

3.3 交互作用の検定法

3.3.1 帰無仮説と対立仮説

因子AとBの交互作用 $((\alpha\beta)_{i,j})$ の個数は、AとBの水準の組み合わせにより $m \times n$ であるが、AとBの交互作用がないということは、AとBのすべての水準組み合わせの交互作用が0であるということである。したがって、交互作用を検定する際の帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は以下ようになる。

$$\begin{aligned} H_0: (\alpha\beta)_{1,1} &= (\alpha\beta)_{1,2} = \dots = (\alpha\beta)_{2,1} \\ &= \dots = (\alpha\beta)_{m,n} = 0 \end{aligned}$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

ここでも、これまでと同様に新たな変数を導入する。

$$\begin{aligned} \gamma_{AB} &= (\gamma_{AB(1,1)}, \gamma_{AB(2,1)}, \gamma_{AB(3,1)}, \dots, \gamma_{AB(m-1,1)}, \\ &\quad \gamma_{AB(1,2)}, \gamma_{AB(2,2)}, \dots, \gamma_{AB(m-1,n-1)}) \end{aligned}$$

の各要素を、

$$\begin{aligned}
\gamma_{AB(i,j)} &= (\alpha\beta)_{i,1} - (\alpha\beta)_{i,j+1} \\
&= (y_{i,1} - \mu_{i,} - \mu_{\cdot,1} + \mu) \\
&\quad - (y_{i,j+1} - \mu_{i,} - \mu_{\cdot,j+1} + \mu) \\
&= y_{i,1} - y_{i,j+1} - \mu_{\cdot,1} + \mu_{\cdot,j+1} \\
&\quad i=1,2,3,\dots,m-1, \quad j=1,2,3,\dots,n-1
\end{aligned}
\tag{30}$$

とすると, $\sum_i (\alpha\beta)_{i,j} = 0, \sum_j (\alpha\beta)_{i,j} = 0$ である⁵⁾ ことから, 上記の帰無仮説と対立仮説は,

$$\begin{aligned}
H_0: \gamma_{AB} &= 0 \\
H_1: H_0 &\text{ではない}
\end{aligned}
\tag{31}$$

と等価である. したがって, 因子 A と B の交互作用の有無を検定するためには, 式 (31) の H_0 が棄却されるか否かを調べればよい.

3.3.2 検定方法

上記の帰無仮説をこれまでと同様の方法で検定すればよい. すなわち, $\hat{\gamma}_{AB}$ が多変量正規分布に従うことを仮定し, 多変量正規分布の性質により H_0 の下では $\hat{\gamma}_{AB}^t \hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}}^{-1} \hat{\gamma}_{AB}$ が自由度 $(m-1) \times (n-1)$ の χ^2 分布に従うことを用いて検定を行う. ただし, $\hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}}$ は $\hat{\gamma}_{AB}$ の分散共分散行列であるが, これはデルタ法により \hat{y} の分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ から計算できる.

因子 A と B の交互作用の検定方法をまとめると以下ようになる.

1. 閾値 \hat{y} とその分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ を推定する (2 節と同様に, 各閾値が独立であるならば, $\hat{\Sigma}_y$ の共分散は 0 となる). このとき, H_0 と H_1 は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
H_0: (\alpha\beta)_{1,1} &= (\alpha\beta)_{1,2} = \dots = (\alpha\beta)_{2,1} \\
&= \dots = (\alpha\beta)_{m,n} = 0
\end{aligned}$$

$$H_1: H_0 \text{ ではない}$$

2. $\hat{\gamma}_{AB}$ を計算する. 1. の H_0 は

$$H_0: \gamma_{AB} = 0$$

と等価である. $\hat{\gamma}_{AB}$ の分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}}$ をデルタ法に基づき計算する. が多変量正規分布に従うことを仮定する.

3. $\hat{\gamma}_{AB}^t \hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}}^{-1} \hat{\gamma}_{AB}$ を計算する. この値は多変量正規分布の性質により, H_0 の下では自由度 $(m-1) \times (n-1)$ の χ^2 分布に従うので, χ^2 分布から p 値を計算する.
4. 3. で計算した p 値が有意水準よりも低ければ

表 3 恒常法による 2 因子実験結果の例 (架空データ).

		方向		
		+j	-j	
位置	(0,2,2)	閾値	1.96	3.57
		分散	0.58	0.62
	(0,-2,2)	閾値	3.95	1.23
		分散	0.74	0.65
(0,2,-2)	閾値	2.35	2.10	
	分散	0.77	0.79	

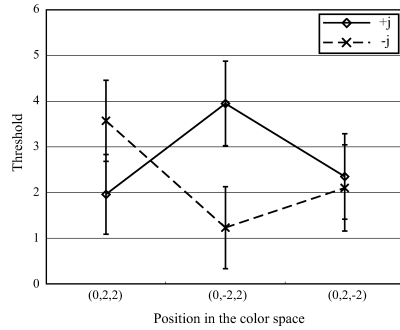


図 2 表 3 の閾値のグラフ. エラーバーは標準誤差 (分散の平方根) である.

H_0 を棄却し (A と B の交互作用がある), 高ければ H_0 を棄却しない (A と B の交互作用があるとは言えない).

3.4 検定例

3.4.1 実験データ例

2 因子実験の主効果と交互作用の検定例を示すために, 恒常法により推定された閾値と分散を表 3 に示す. また, 閾値のグラフを図 2 に示す. 閾値はロジスティック回帰モデルにより正答率 50% に対応する色差として推定したが, フィッティングに用いた試行数と正答数のデータは省略した. 実験条件 (因子) は OSA 色空間内の位置 $((L,j,g) = (0, 2, 2), (0, -2, 2), (0, 2, -2))$ と方向 $(+j, -j)$ である. 位置を因子 A, 方向を因子 B とする.

3.4.2 主効果の検定

色空間内位置の主効果の検定を行う.

1. 各閾値が独立であると仮定すると, 表 3 から閾値 \hat{y} とその分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ は以下のとおりである.

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} \\ \hat{y}_{12} \\ \hat{y}_{21} \\ \hat{y}_{22} \\ \hat{y}_{31} \\ \hat{y}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.96 \\ 3.57 \\ 3.95 \\ 1.23 \\ 2.35 \\ 2.10 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\hat{\Sigma}_y = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{32} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.74 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.79 \end{bmatrix} \quad (33)$$

2. 式(28)と式(22)により $\hat{\mathbf{y}}$ から $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_A$ を計算すると

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_A = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{A1} \\ \hat{\gamma}_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{1\cdot} - \hat{\mu}_{2\cdot} \\ \hat{\mu}_{1\cdot} - \hat{\mu}_{3\cdot} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{y_{11} + y_{12} - y_{21} - y_{22}}{2} \\ \frac{y_{11} + y_{12} - y_{31} - y_{32}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.175 \\ 0.54 \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。また、その分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_A}$ はデルタ法により計算するが、その計算に用いる \mathbf{G} は式(7)により、

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_{A1}}{\partial y_{11}} & \frac{\partial \gamma_{A1}}{\partial y_{12}} & \frac{\partial \gamma_{A1}}{\partial y_{21}} & \frac{\partial \gamma_{A1}}{\partial y_{22}} & \frac{\partial \gamma_{A1}}{\partial y_{31}} & \frac{\partial \gamma_{A1}}{\partial y_{32}} \\ \frac{\partial \gamma_{A2}}{\partial y_{11}} & \frac{\partial \gamma_{A2}}{\partial y_{12}} & \frac{\partial \gamma_{A2}}{\partial y_{21}} & \frac{\partial \gamma_{A2}}{\partial y_{22}} & \frac{\partial \gamma_{A2}}{\partial y_{31}} & \frac{\partial \gamma_{A2}}{\partial y_{32}} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (35)$$

となり、この \mathbf{G} を用いて式(8)により $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_A}$ を計算すると以下ようになる。

$$\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_A} = \mathbf{G} \hat{\Sigma}_y \mathbf{G}^t = \begin{bmatrix} 0.6475 & 0.3 \\ 0.3 & 0.69 \end{bmatrix} \quad (36)$$

3. 多変量正規分布の性質により自由度2の χ^2 乗値となるを計算すると、

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_A^t \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_A}^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_A = 0.430 \quad (37)$$

となり、さらに、自由度2の χ^2 分布表から

この値の p 値を求めると、

$$p = 0.807 \quad (38)$$

となる。

4. 有意水準が5%であるならば、 $p = 0.807 > 0.05$ であるため H_0 を棄却しない、すなわち、色空間内位置には有意な主効果があるとは言えないと判定する。

色空間内の方向の主効果についても全く同じ方法で検定できる。方向の主効果の検定結果の p 値は、

$$p = 0.504 \quad (39)$$

となる。

3.4.3 交互作用の検定

色空間内の位置と方向の交互作用の検定を行う。

1. 各閾値が独立であると仮定すると、表から閾値 $\hat{\mathbf{y}}$ とその分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_y$ は式(32)と式(33)のようになる。

2. 式(30)により $\hat{\mathbf{y}}$ から $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{AB}$ を計算すると

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{AB} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{AB(11)} \\ \hat{\gamma}_{AB(21)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} - \hat{y}_{12} - \hat{\mu}_{\cdot 1} + \hat{\mu}_{\cdot 2} \\ \hat{y}_{21} - \hat{y}_{22} - \hat{\mu}_{\cdot 1} + \hat{\mu}_{\cdot 2} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} - \hat{y}_{12} - \frac{\hat{y}_{11} + \hat{y}_{21} + \hat{y}_{31}}{3} + \frac{\hat{y}_{12} + \hat{y}_{22} + \hat{y}_{32}}{3} \\ \hat{y}_{21} - \hat{y}_{22} - \frac{\hat{y}_{11} + \hat{y}_{21} + \hat{y}_{31}}{3} + \frac{\hat{y}_{12} + \hat{y}_{22} + \hat{y}_{32}}{3} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2.06 \\ 2.27 \end{bmatrix} \quad (40)$$

となる。また、その分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_{AB}}$ はデルタ法により計算するが、その計算に用いる \mathbf{G} は式(7)により、

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_{AB(11)}}{\partial y_{11}} & \frac{\partial \gamma_{AB(11)}}{\partial y_{12}} & \frac{\partial \gamma_{AB(11)}}{\partial y_{21}} & \frac{\partial \gamma_{AB(11)}}{\partial y_{22}} \\ \frac{\partial \gamma_{AB(21)}}{\partial y_{11}} & \frac{\partial \gamma_{AB(21)}}{\partial y_{12}} & \frac{\partial \gamma_{AB(21)}}{\partial y_{21}} & \frac{\partial \gamma_{AB(21)}}{\partial y_{22}} \\ & \frac{\partial \gamma_{AB(11)}}{\partial y_{31}} & \frac{\partial \gamma_{AB(11)}}{\partial y_{32}} \\ & \frac{\partial \gamma_{AB(21)}}{\partial y_{31}} & \frac{\partial \gamma_{AB(21)}}{\partial y_{32}} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.667 & -0.667 & -0.333 & 0.333 \\ -0.333 & 0.333 & 0.667 & -0.667 \\ & -0.333 & 0.333 \\ & -0.333 & 0.333 \end{bmatrix} \quad (41)$$

となり、この G を用いて式 (6) により $\hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}}$ を計算すると以下ようになる。

$$\hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}} = G \hat{\Sigma}_y G^t = \begin{bmatrix} 0.861 & -0.402 \\ -0.402 & 0.924 \end{bmatrix} \quad (42)$$

3. 多変量正規分布の性質により自由度 2 の χ^2 値となるを計算すると、

$$\hat{\gamma}_{AB}^t \hat{\Sigma}_{\gamma_{AB}}^{-1} \hat{\gamma}_{AB} = 7.249 \quad (43)$$

となり、さらに、自由度 2 の χ 二乗分布表からこの値の p 値を求めると、

$$p = 0.027 \quad (44)$$

となる。

4. 有意水準が 5% であるならば、 $p = 0.027 < 0.05$ であるため H_0 を棄却する、すなわち、色空間内の位置と方向の間には有意な交互作用があると判定する。

4. おわりに

本論文では、恒常法で求めた複数の閾値間の差を、デルタ法と多変量正規分布の性質を用いることによって統計的に検定する方法を提案した。恒常法からは精度良く閾値を求めることができるが、複数の閾値間の差に関して分散分析などの一般的な方法では検定を行えないため、第 1 節で述べたようにあまり適切とは言えない方法による検定を行っている場合¹⁻³⁾が見受けられた。本方法では、閾値が正規分布に従うことを仮定しなければならないものの、閾値を推定するために最尤法で使われた全てのデータを用いて検定を行うため、恒常法から推定された閾値間の有意差検定をより適切に行うことができる。2 閾値間の差の有無に関してはデルタ法などにより信頼区間を構成することによっても検定することができるが、多因子実験における主効果や交互作用の信頼区間を構成することは困難であろう。本方法では、多変量正規分布の性質を利用することにより、多因子実験における主効果や交互作用の有無の検定が可能である。また、各被験者内における有意差検定が可能であること、分散分析で必要な等分散の仮定などが必要ないこと、検定手続きが比較的単純であることなども本方法の長所であろう。

近年では、恒常法により推定された閾値間の有意差検定や閾値の信頼区間の推定をブートストラップ法^{9,10)}により行う文献¹¹⁻¹³⁾が増えてきている。ブートストラップ法は閾値が正規分布に従うことを仮定しないため、試行数が少ない場合など、閾値が正規分布に従うことが仮定できない場合に有効な方法であると考えられる。本方法で用いたような漸近正規性により推定される分散とブートストラップ法により推定される分散の精度の比較については参考文献を参照していただきたい^{14,15)}。

謝辞 本論文の執筆にあたり、ロジスティック回帰モデルや最尤法に関して非常に有益なご助言をいただいた東京大学の繁榊算男教授に深く感謝いたします。

文 献

- 1) A. L. Nagy, K. E. Neriani and T. L. Young: Effects of target and distractor heterogeneity on search for a color target. *Vision Research*, **45**, 1885–1899, 2005.
- 2) S. F. Pas and J. J. Koenderink: Visual discrimination of spectral distributions. *Perception*, **33**, 1483–1497, 2004.
- 3) F. A. A. Kingdom and R. Kasrai: Colour unmasking dark targets in complex displays. *Vision Research*, **46**, 814–822, 2006.
- 4) 高橋行雄, 芳賀俊郎, 大橋靖雄: SAS による実験データの解析. 東京大学出版会, 1989.
- 5) 東京大学教養学部統計学教室: 自然科学の統計学. 東京大学出版会, 1992.
- 6) 丹後俊郎: 統計モデル入門: 朝倉書店, 2000.
- 7) 芝 祐順, 渡部 洋, 石塚智一: 統計用語辞典. 新曜社, 1984.
- 8) 丹後俊郎, 山岡和枝, 高木晴良: ロジスティック回帰分析—SAS を利用した統計解析の実例—. 朝倉書店, 1996.
- 9) B. Efron: The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans. Society in Applied Mathematics, Philadelphia, 1982.
- 10) F. A. Wichmann and N. J. Hill: The psychometric function: II. Bootstrap-based confidence

intervals and sampling. *Perception and Psychophysics*, **63**, 1314–1329, 2001.

- 11) T. A. Carlson, P. Schrater and S. He: Floating square illusion: Perceptual uncoupling of static and dynamic objects in motion. *Journal of Vision*, **6**, 132–144, 2006.
- 12) B. Khang, J. J. Koenderink, A. M. L. Kappers: Perception of surface reflectance of 3-D geometrical shapes: Influence of lighting mode. *Perception*, **32**, 1311–1324, 2003.
- 13) H. A. Allen and T. Ledgeway: Attentional modulation of threshold sensitivity to first-order motion and second-order motion patterns. *Vision Research*, **43**, 2927–2936, 2003.
- 14) D. H. Foster and W. F. Bischof: Bootstrap variance estimators for the parameters of small-sample sensory-performance function. *Biological Cybernetics*, **57**, 341–347, 1987.
- 15) D. H. Foster and W. F. Bischof: Thresholds from psychometric functions: superiority of bootstrap to incremental and probit variance estimator. *Psychological Bulletin*, **109**, 152–159, 1991.

附録：本方法による検定プログラム

本手法による検定を行うことができるエクセルファイルは <http://www.uchikawa.ip.titech.ac.jp/pgs.html> からダウンロードできる。これらのエクセルファイルは閾値とその標準誤差を入力とするため、事前に最尤法を用いて心理測定関数をフィッティングさせることにより閾値とその標準誤差を推定しておく必要がある。ロジスティック回帰モデルやプロビットモデルなどの心理測定関数のフィッティングは SAS や SPSS などの市販の統計ソフトにより行うことができる。また、かなり簡易なプログラムではあるが、著者らが作成したロジスティック回帰モデルを心理測定関数とした最尤法によるフィッティングプログラムも上記のページからダウンロード可能である (Mac OS X, Mac OS 9 用)。

これらのエクセルファイルやプログラムの使用法については、ダウンロードファイル中にある説明を参照してほしい。ただし、これらはいくまで参考用であり、その動作や結果に対するいかなる責任も著者らは負わないものとする。使用に関しては自己責任でお願いしたい。