

輻輳と網膜像差と知覚された奥行量の関係

東 巧・中溝 幸夫

福岡教育大学
〒811-41 宗像市赤間 729-1

(受付 1996 年 2 月 28 日；改訂受付 1996 年 3 月 21 日；受理 1996 年 3 月 25 日)

The Magnitude of Stereoscopic Depth as a Function of Convergence and Retinal Disparity

Takumi HIGASHI and Sachio NAKAMIZO

Department of Psychology, Fukuoka University of Education

729-1 Akama, Munakata, Fukuoka 811-41

(received 28 Feb 1996; received in revised form 21 May 1996; accepted 25 May 1996)

Two experiments examined the magnitude of stereoscopic depth as a function of convergence and retinal disparity in holding the viewing distance and accommodation constant. Stimuli were random-dot stereograms (30 mm wide \times 35 mm long) and were presented with a haploscope. In Experiment 1, eight observers estimated the magnitude of the perceived depth for seven convergence angles (-2, 0, 4, 8, 12, 16, and 20 degrees) and three retinal disparities (8', 16', and 32'). The perceived depth increased nonlinearly with a decrease of the convergence angle and linearly with an increase of the disparity. In Experiment 2, eleven observers estimated the perceived depth, distance, and size for the seven convergence angles with and without an artificial pupil. The perceived depth, distance, and size increased with a decrease of the convergence angle. The accommodation had almost no effect on the perceived depth, distance, and size. The results of the two experiments suggest that the visual system calibrates retinal disparity by means of convergence in processing depth.

1. はじめに

人間の両眼は水平方向に約 6 cm 離れているため、それぞれの眼の網膜に投影される物体の像には「ずれ」が生じる。このずれは、両眼網膜像差 (binocular retinal disparity, 以下、網膜像差) と呼ばれ、奥行知覚の手がかり

りのひとつとされてきた。

視覚系が網膜像差から奥行量を「計算」するためには、眼から物体までの絶対距離 (以下、距離) の情報が必要であると言われていた^{2,4)}。図 1 は、眼の高さの横断面 (transverse plane) 上において、2 つの物体 (N, F) と眼との幾何学的関係を示す。眼から N までの距離を D、N と F の奥行を d、眼球間距離を I と

本研究は、文部省科学研究費一般研究 C (課題番号 07801016 代表者 中溝幸夫) の援助のもとで行われた。

すると、網膜像差 δ と D と d の関係は次式で表わされる²⁾ (単位はラジアン)。

$$d \approx \delta \cdot D^2 / I \quad (1)$$

(1) 式は、 δ と I が一定のとき、 d は D の自乗に比例することを意味している。 [(1) 式は、網膜像差の逆自乗法則 (inverse-square law of disparity) と呼ばれている。] もし視覚系が (1) 式に一致するようにそれぞれの情報を処理して奥行を計算しているならば、網膜像差を距離の情報を用いてキャリブレート (読み換え) しているはずである。この予測は、ステレオグラムを用いて容易に例証することができる。たとえば、アナグリフ法によってステレオグラムを立体視しているとしよう。このとき、ステレオグラムまでの観察距離を2倍に増加すると、見かけの奥行量もほぼ2倍に増加することがわかる。観察距離が2倍になると、網膜像差は2分の1に減少するので、奥行量が2倍になることは、(1) 式の予測に一致しているのである。

(1) 式の予測は、奥行恒常性 (stereoscopic depth constancy) に関する研究によって実験

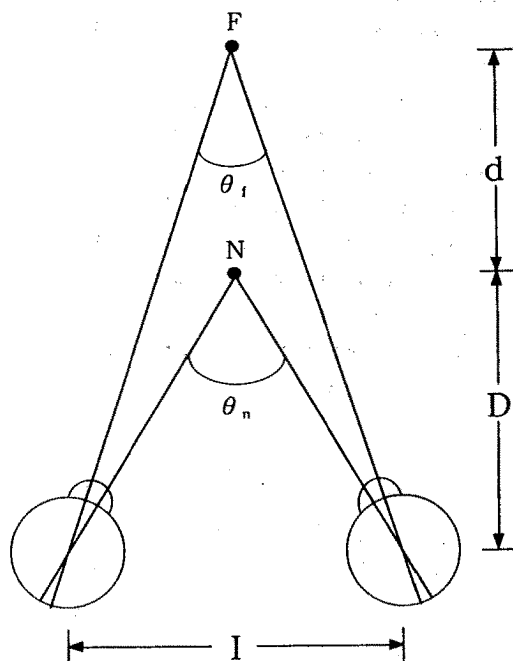


図1 2つの物体(N, F)、輻輳角(θ_f , θ_n)、絶対距離(D)、奥行(d)の幾何学的関係

的にテストされてきた^{3,7)}。たとえば、下野・中溝・土田(1990)⁷⁾は、ランダムドット・ステレオグラムを用いて、網膜像差の大きさを一定(12')にして、刺激までの観察距離を0.5 m から 4 m の範囲で変化させ、知覚された奥行を測定した。その結果、少なくとも4 m の距離までは、知覚された奥行量は(1) 式の予測に一致した。これらの研究結果は、一定範囲の D と δ において、視覚系が距離の情報を用いて網膜像差をキャリブレートして奥行を出力していることを示唆している。

しかし、視覚系がどんな情報を使って網膜像差をキャリブレートしているか、という問題がすっかり解けたわけではない^{4,8)}。なぜなら、上で述べた奥行恒常性に関する研究^{5,7)}では、観察距離と輻輳角とが共変しているからである。Gillam(1995)⁴⁾が指摘しているように、視覚系の奥行処理には、距離知覚の間接効果(indirect effect)があるのか、それとも距離の手がかりの一つである輻輳角の直接効果(direct effect)があるのか、いまだはっきりしていないのである。

図1において、奥行 d は、網膜像差 δ 、眼球間距離 I と輻輳角 θ の関数として表わすこともできる (θ_f と θ_n の差は、ひじょうに小さいと仮定する)。

$$d \approx I \cdot \delta / \theta^2 \quad (2)$$

(2) 式は、 δ と I が一定のとき、 d は輻輳角 θ の自乗に反比例することを意味している。

[(2) 式の導出については、付録を参照。] もし視覚系が、距離の情報ではなく、直接、輻輳角の情報を使って網膜像差をキャリブレートしているならば、知覚された奥行は輻輳角の自乗に反比例するはずである。

本研究の主目的は、(2) 式にもとづく予測を確かめることであった。そのために、ハプロスコープを用いて刺激の観察距離を一定に保ち、輻輳角だけを変化させてステレオグラムの知覚された奥行量を測定した。

2. 実験1

2.1 目的

実験1の目的は、対称・非対称輻輳条件において、ステレオグラムの知覚された奥行量を輻輳角の関数として測定することであった。対称輻輳条件とは、正中面上の刺激をシミュレートした条件で、両眼は対称的に輻輳した(図2参照)。一方、非対称輻輳条件とは、一方の眼が常に真正面を向き(第1眼位)、他方の眼だけが内転する輻輳条件であった。これらの条件を設けた理由は、両眼融合視された刺激の視方向(visual direction)の差が知覚された奥行量に影響するかどうかを調べるという副次的目的のためであった。

2.2 方法

2.2.1 刺激と装置

刺激はランダムドット・ステレオグラムで、刺激の周辺領域の大きさは、縦 35 mm ×

横 30 mm であり、網膜像差を持つ中央領域の大きさは、縦 16.2 mm × 横 16.8 mm で、交差性網膜像差を持っていた。一つのドットの大きさは、縦 0.36 mm × 横 0.33 mm であった。刺激はハプロスコープ(高田器械, シノプトフォア)によって提示された。この装置は、刺激の観察距離を一定にした状態で、輻輳角を連続的に変化させることができた(図2参照)。刺激面から角膜表面までの距離はほぼ 15 cm で、調節せずに刺激を明視できるように接眼部に 6.5 ジオプターの凸レンズが挿入されていた。ステレオグラムが挿着されるアーム部分を回転することにより輻輳角が制御された。ステレオグラムの中央上部には、眼球位置を統制するために T 型(逆 T 型)のノニウス線分が描かれていた。

2.2.2 手続き

被験者は、ハプロスコープの観察窓から両

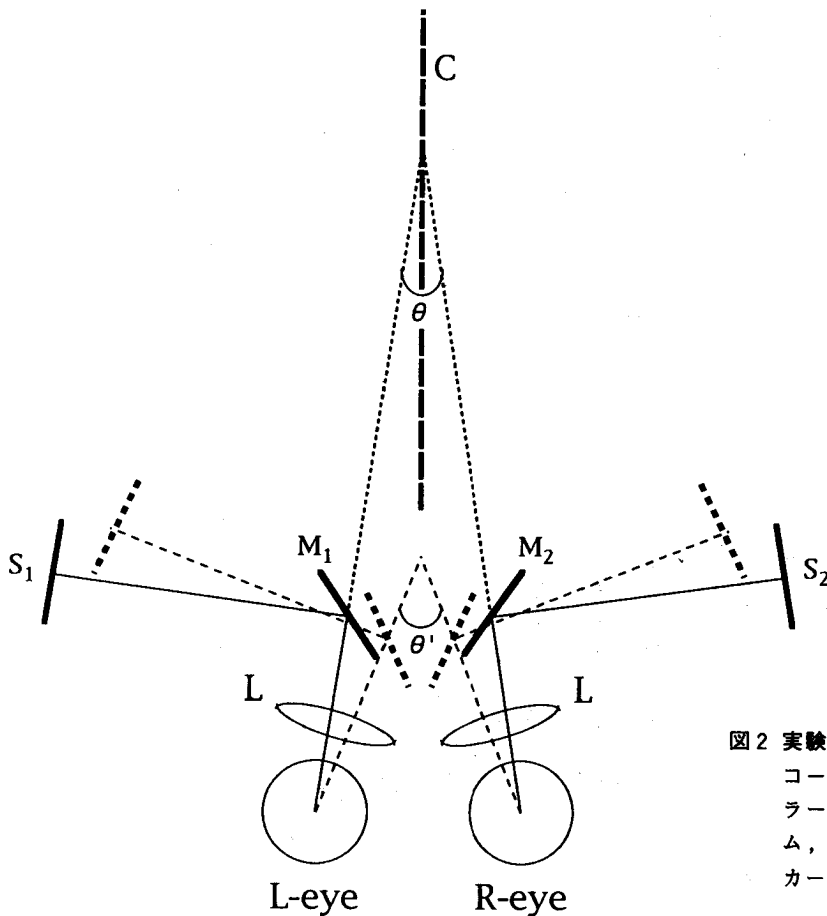


図2 実験で用いたハプロスコープの概念図。M:ミラー, S:ステレオグラム, L:レンズ, C:カーソル。

眼で刺激を観察した。左右眼の観察窓の間隔は、被験者の眼球間距離にはほぼ一致するように調整された。被験者の課題は、ノニウス線分が1本の垂直線に見えることを確認した後、ステレオグラムの中央領域の知覚された奥行量をノギスで再生することであった。ノギスの目盛は、遮蔽されていた。実験の独立変数は、輻輳角(0°, 4°, 8°, 12°, 16°, 20°)と網膜像差(8', 16', 32')であった。2つの観察条件が用いられた。ひとつは対称輻輳条件で、もうひとつは非対称輻輳条件であった。(両視軸が平行位を超えて開散し、かつ両眼融合が可能な被験者では、-2°の輻輳条件、つまり眼球開散位でも知覚された奥行が測定された。)非対称輻輳条件では、左眼は第1眼位に固定され、右眼の位置だけが変えられた。それぞれの観察条件内で網膜像差の提示順序はランダムにし、ある網膜像差条件のなかでの輻輳角の提示順序はランダムにした。ひとりの被験者の総試行数は、6(輻輳角)×3(網膜像差)×2(対称・非対称輻輳)×2(繰り返し)の72試行であった。

2.2.3 被験者

両眼視に異常のない成人8名(男性2名、

女性6名)が被験者として参加した。

2.3 結果と考察

被験者が再生した奥行量について、2回の試行の平均値を分析の単位として、3要因(輻輳角×網膜像差×対称・非対称輻輳)分散分析を行った結果、2つの要因の主効果、および交互作用は統計的に有意であった[網膜像差： $F(2, 14)=140.261, p<0.001$ ；輻輳角： $F(5, 35)=50.198, p<0.001$ ；交互作用(網膜像差×輻輳角)： $F(10, 70)=21.210, p<0.001$]。ω²の統計量⁹⁾にもとづくと、網膜像差の要因は全分散の48.2%，輻輳角の要因は20.7%，交互作用は5.3%を説明することができる。これらの結果は、網膜像差および輻輳角の変数と知覚された奥行量との関係(association)が強いことを示している。一方、対称・非対称輻輳条件の効果は、統計的に有意ではなかった[$F(1, 7)=0.027$]。図3は、知覚された奥行量について、8名の被験者の平均値を対称・非対称輻輳条件別に輻輳角の関数としてプロットしたものである。それぞれのデータポイント上の垂直線分は標準偏差を示す。平均値を結んだ各線分の勾配と高さは、上で述べた統計的分析結果を反映

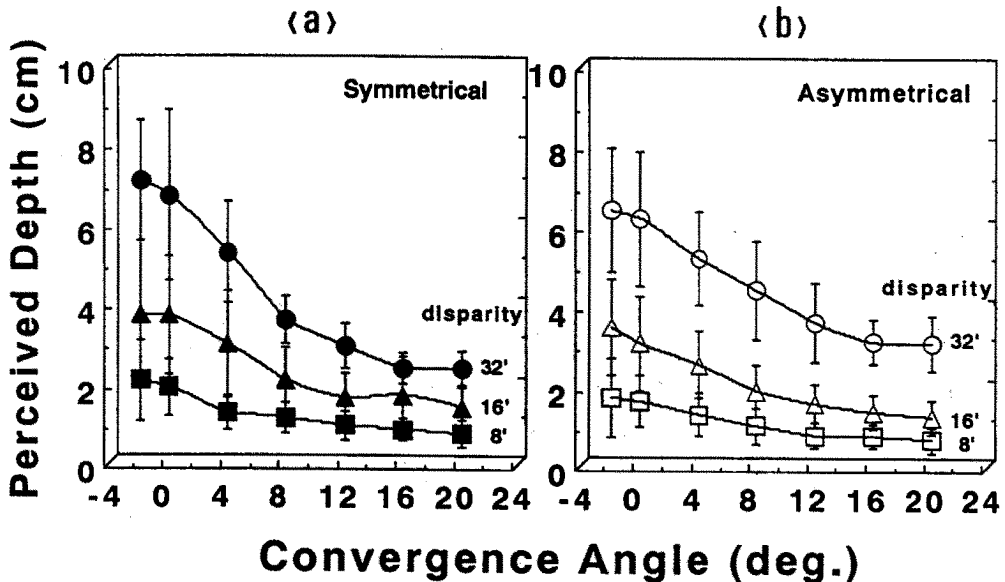


図3 輻輳角の関数としてプロットされた知覚された奥行量の平均値(実験1)。(a)は対称輻輳条件、(b)は非対称輻輳条件を示す。

している。

網膜像差の増加（減少）にともなって、すべての輻轉角条件において知覚された奥行量は増加（減少）した。奥行量の増加率は、網膜像差の増加率にはほぼ対応していた。すなわち、網膜像差が2倍（4倍）になると、平均奥行量は1.97（3.84）倍になった。この結果は、(2)式の予測（奥行は、網膜像差の大きさに比例する）にはほぼ一致していた。

対称輻轉条件と非対称輻轉条件の間で、知覚された奥行量に差はなかった。この結果は、刺激の方向知覚が距離知覚（奥行視）に影響しないことを意味しており、視方向と視距離の処理機構の独立性を示す事実の一つであるといえる。中溝・近藤(1986)¹⁰⁾は、非対

称輻轉条件において片眼の眼球位置を変化させたとき、変化量のほぼ半分だけ視方向が変わることを示した。本実験では、視方向を測定したわけではないが、非対称輻轉条件において、0°から20°までの輻轉変化（右眼のみ）は、正中面から左側10°への視方向の変化を生んだはずである。一方、対称輻轉条件は正中面上の刺激をシミュレートしていた。にもかかわらず、両条件下での知覚された奥行量に差がなかったという事実は、奥行知覚と方向知覚の独立性を示唆している。

また、興味深い結果は、両眼視軸が平行位を超えて開散した眼球位置でも知覚された奥行量が増加し続けたという事実である。-2°の輻轉角でステレオグラムの両眼融合が可能であったのは、4名の被験者であった（実験2では、11名中8名が開散した）。眼位正常な被験者では、現実の環境において、視軸が平行位を超えて開散することはありえない。（光学的無限距離、例えば星を固視した場合に、両眼視軸は平行位となる。）したがって、-2°の輻轉角で知覚された奥行量がそれ以外の輻轉条件よりも大きいという結果は、それが輻轉それ自体の奥行視への効果であるということを強く示唆している。

刺激の物理的距離と網膜像差の大きさを一定に保ち、輻轉角を減少（増加）すると、知覚された奥行量が増加（減少）したという本実験の結果は、視覚系が輻轉の情報を用いて奥行を処理している可能性を示している。しかし、奥行量の変化はかならずしも(2)式の予測に一致していなかった（図4参照）。輻轉角が比較的大きい条件では、知覚された奥行量は(2)式にもとづいて予測される値よりも過大評価され、輻轉角が比較的小さい条件では、過小評価された。この理由を(2)式にもとづいて考えると、視覚系がI、 δ 、 θ のいずれかを誤って評価したためと考えられる。視覚系がIを誤評価する可能性はきわめて低いと考えられる。また、ほぼ20°までの

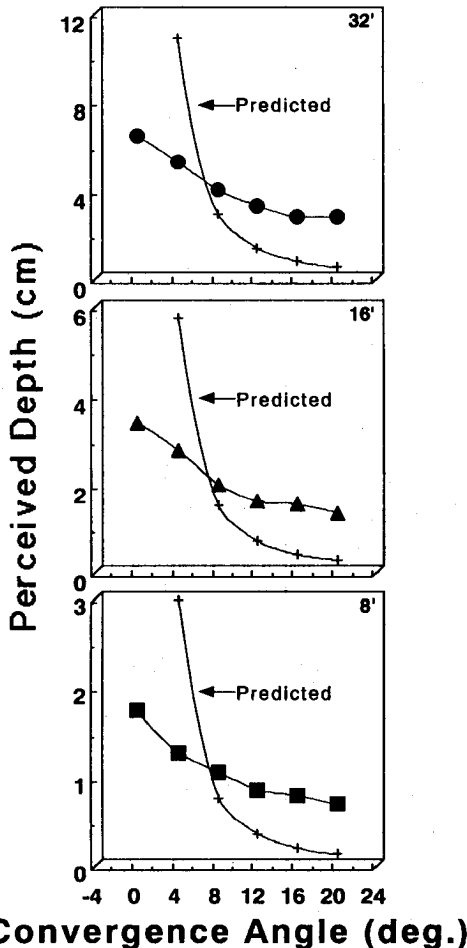


図4 (2)式にもとづく予測値と実測値との比較（実験1）

大きさの網膜像差の処理が正確であることも示されている⁶⁾。[‘網膜像差の処理が正確である’とは、網膜像差によってシミュレートされた物理的奥行量と知覚された奥行量とが一致すること (veridicality) を意味する。] これらのことから、知覚された奥行の過大・過小評価の一つの原因は、視覚系による輻輳角の過小・過大評価であると推定することができる。(図4によれば、どの網膜像差条件でも、知覚された奥行量は、輻輳角がほぼ8°近辺で(2)式にもとづく予測値と一致している。興味深い事実ではあるが、この結果が何に起因するものなのか、今のところ明らかではない。)

奥行の過大・過小評価の原因として、もう一つの可能性は、距離(エゴセントリック距離)の情報の過大・過小評価が考えられる。つまり、輻輳の情報を使って距離情報が計算される過程で、距離の過小・過大評価が起こり、その情報にもとづいて奥行が計算されたために、知覚された奥行量の過小・過大評価が起こったという推論である。この推論を調べるため、実験2では知覚された奥行量の測定に加えて、刺激の知覚された距離、知覚された大きさも測定した。

3. 実験2

3.1 目的

実験2の目的は、人工瞳孔を通して刺激を観察することによって調節刺激を一定に保ち、知覚された奥行量に加えて刺激の知覚された距離と大きさを輻輳角の関数として測定することであった。人工瞳孔視条件を設けた理由は、輻輳以外の距離手がかりをできるだけ排除するためであった。調節が距離知覚の手がかりになりうることは、調節を測定し、同時に刺激の知覚された距離を測定した Fisher and Cuiffrieda (1988)¹¹⁾によって例証されている。また、調節の距離手がかり効果は、人工瞳孔を用いることによって最小に抑えることができることも知られている¹²⁾。そ

の理由は、調節システムに対する直接的刺激である網膜像のぼけ (retinal blur) が最小化されるからである。

3.2 方法

刺激はランダムドット・ステレオグラムで、刺激の周辺領域の大きさは、縦34mm×横29mmであり、網膜像差を持つ中央領域の大きさは、縦15.5mm×横16.3mmで、交差性網膜像差を持っていた。一つのドットの大きさは、縦0.35mm×横0.32mmであった。装置は、実験1と同じであった。被験者の課題は、実験1と同様の方法で奥行量を再生した後、刺激の知覚された距離と大きさを評定することであった。距離の評定には、ポインティング法を用いた。すなわち、被験者は、正中面上で移動可能なカーソル(図2参照)を親指と人さし指で持ち、見えない腕を伸ばして知覚された刺激の真下にカーソルを置いた。被験者が調整したカーソルの位置を実験者が測定した。大きさの評定は、再生法を用いた。すなわち、被験者はステレオグラムの上辺の見かけの長さをノギスの幅によって再生した。ただし、ノギスの目盛は遮蔽されていた。実験変数は輻輳角(実験1と同じ)と網膜像差(7.4°, 14.8°, 29.5°)であった。実験2では2つの観察条件が用いられた。ひとつは人工瞳孔視条件で、被験者は人工瞳孔(孔径: 1.0mm)を通して刺激を観察した。もうひとつは通常視条件で、どちらの観察条件も輻輳の変化は、実験1の対称輻輳条件と同じであった。(実験1と同様に、両視軸が平行位を超えて開散し、かつ両眼融合が可能な被験者では、-2°の輻輳条件でも測定された。) 被験者は成人11名(男性7名、女性4名)で、そのうち3名(全員女性)は実験1にも参加していた。ひとりの被験者の総試行数は、6(輻輳角)×3(網膜像差)×2(人工瞳孔視・通常視)×2(繰り返し)の72試行であった。

3.3 結果と考察

被験者が再生した奥行量について、2回の

試行の平均値を分析の単位として、3要因（輻輳角×網膜像差×人工瞳孔視・通常視）分散分析を行った結果、2つの要因の主効果、および交互作用は統計的に有意であった〔網膜像差： $F(2, 20)=40.48, p<0.001$ ；輻輳角： $F(5, 50)=22.755, p<0.001$ ；交互作用（網膜像差×輻輳角）： $F(10, 100)=11.942, p<0.001$ 〕。 ω^2 の統計量⁹⁾にもとづくと、網膜像差の要因は全分散の28.7%，輻輳角の要因は13.7%，交互作用は1.7%を説明することができる。これらの結果は、実験1と同様に、網膜像差および輻輳角の変数と知覚された奥行との関係が強いことを意味している。一方、人工瞳孔視・通常視の効果は、統計的に有意ではなかった〔 $F(1, 10)=1.767$ 〕。図5は、知覚された奥行量について、11名の被験者の平均値を網膜像差の大きさ別、観察条件別に輻輳角の関数としてプロットしたものである。平均値を結んだ各線分の勾配は、上で述べた統計的分析結果を反映している。

実験2の結果、輻輳の関数としての知覚された奥行量の変化は、実験1の結果とほぼ同じであった。すなわち、人工瞳孔によって調節刺激を一定に保った場合でも、知覚された奥行量は、通常視の場合とほぼ同じであった。この事実は、知覚された奥行量の変化に調節がほとんど効果を持たなかったことを意

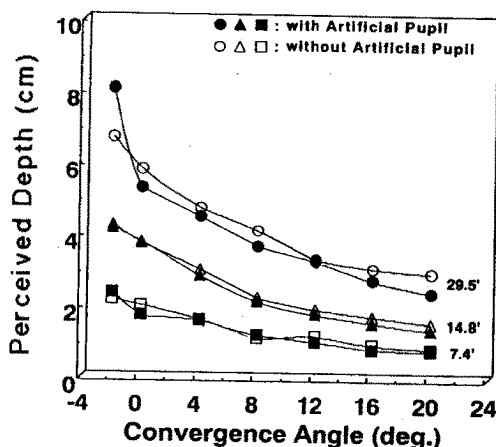


図5 輻輳角の関数としてプロットされた知覚された奥行量の平均値（実験2）

味している。

被験者が評定した知覚された距離について、2回の試行の平均値を分析の単位として、3要因（輻輳角×網膜像差×人工瞳孔視・通常視）分散分析を行った結果、2つの要因の主効果は統計的に有意であった〔網膜像差： $F(2, 20)=15.442, p<0.001$ ；輻輳角： $F(5, 50)=6.603, p<0.001$ 〕。しかし、 ω^2 の統計量⁹⁾によれば、網膜像差の要因は全分散のわずか0.8%，輻輳角の要因もわずか1.7%しか説明できなかった。これらの結果は、網膜像差および輻輳角の変数と知覚された距離との関係が本実験事態において非常に弱かったことを意味する。一方、人工瞳孔視・通常視の主効果は、統計的に有意ではなかった〔 $F(1, 10)=0.863$ 〕。図6は、11名の被験者の知覚された距離の平均値を輻輳角の関数としてプロットしたものである。データポイントは、人工瞳孔視条件と通常視条件の平均値を、垂直線分は標準偏差を示す。統計的分析結果は、輻輳角の減少にともない知覚された距離が増加したことを示したが、その増加はひじょうにわずかなものにすぎなかった。

本実験において、調節は知覚された距離にほとんど効果をもたなかった。一方、輻輳は、知覚された距離にわずかに効果をもっていた。しかし、輻輳角にもとづいて計算された距離の予測値と知覚された距離とは非常に

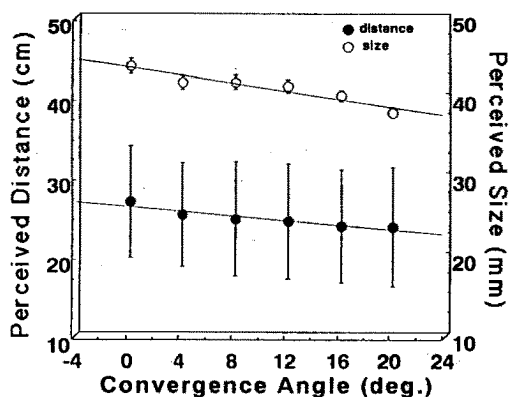


図6 輻輳角の関数としてプロットされた知覚された距離と知覚された大きさの平均値と標準偏差（実験2）

異なっていた。輻輳角が大きい場合 (20°) には、知覚された距離の過大視が起こり、輻輳角が小さい場合 (12° 以下) には、知覚された距離の過小視が起こっていた。したがって、距離知覚の場合にも、視覚系は輻輳の情報を誤って評価している可能性が考えられる。

被験者が再生した刺激の知覚された大きさについて、2回の試行の平均値を分析の単位として、3要因 (輻輳角×網膜像差×人工瞳孔視・通常視) 分散分析を行った結果、輻輳の主効果だけが統計的に有意であった [F(5, 50)=7.989, $p<0.001$]。しかし、 ω^2 の統計量によれば、輻輳角の要因は全分散のわずか3.4%しか説明できなかった。人工瞳孔視・通常視条件および網膜像差の要因の効果は有意ではなかった [人工瞳孔視・通常視: F(1, 10)=3.165; 網膜像差: F(2, 20)=0.355]。図6には、11名の被験者の知覚された大きさの平均値が輻輳角の関数としてプロットされている。データポイントは、2つの観察条件、網膜像差条件の平均値を、垂直線分は標準偏差を示す。

知覚された大きさは、輻輳の増加にともなわずかに減少した。この結果は、輻輳マイクロブシア (vergence micropsia) として知られている現象である³⁾。輻輳マイクロブシアとは、刺激の観察距離と網膜像の大きさが一定のとき、輻輳が大きくなる (輻輳距離が小さくなる) と、知覚された大きさが減少するという輻輳の効果である。また、この結果は、大きさ-距離不変仮説 (size-distance invariance hypothesis) の予測とも整合する。つまり、知覚された距離が減少した分、知覚された大きさも減少したのである。

4. 全体考察

2つの実験結果は、視覚系が輻輳の情報を用いて網膜像差をキャリブレーションして奥行を出力していることを示唆している。刺激の観

察距離と調節が一定の条件下で、ランダムドット・ステレオグラムの知覚された奥行き量は、輻輳角の減少にともなって増加した。また、両眼視軸が平行位を超えて開散した場合でも、知覚された奥行き量の増加が観察された。しかし、輻輳と奥行き量との得られた関係は、両者の数学的関係にもとづく予測とは一致しなかった。輻輳角が大きい場合は、(2)式の予測よりも知覚された奥行き量の過大評価が起こり、輻輳角が小さい場合は、過小評価が起こった。奥行き量の過大・過小評価の一つの原因は、それぞれ視覚系による輻輳角の過小・過大評価であると推定することができる。視覚系による輻輳の不正確な“評価”については、Foley (1980, 1985)^{13,14)}の結果とも一致している。

一方、実験2の結果は、観察距離と調節一定の条件下で、輻輳角の減少にともない刺激の知覚された距離が増加することを示した。しかし、この場合も輻輳と奥行き量との関係と同様に、輻輳と距離との得られた関係は、両者の数学的関係にもとづく予測とは一致しなかった。この結果も、視覚系による輻輳の誤った評価という解釈と整合する。

謝辞 有益なコメントをいただいた査読者に深く感謝いたします。

文献

- 1) C. Wheatstone: Contributions to the physiology of vision: I. On some remarkable and hitherto unobserved phenomena of binocular vision. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 128, 371-394, 1838.
- 2) H. Ono and J. Comerford: Stereoscopic depth constancy. W. Epstein (ed): *Stability and constancy in visual perception: mechanisms and processes*. Wiley, New York, 1977.
- 3) I. P. Howard and B. J. Rogers: Binocular vision and stereopsis. Oxford University Press, New York, 1995.
- 4) B. Gillam: The perception of spatial layout from

- static optical information. *W. Epstein and S. Rogers (eds): Perception of space and motion*. Academic Press, San Diego, 1995.
- 5) H. Wallach and C. Zuckerman: The constancy of stereoscopic depth. *American Journal of Psychology*, 76, 404-412, 1963.
 - 6) M. Ritter: Effect of disparity and viewing distance on perceived depth. *Perception and Psychophysics*, 22, 400-407, 1977.
 - 7) 下野孝一, 中溝幸夫, 土田明美: 両眼網膜像差にもとづく見えの奥行量と絶対距離. *福岡教育大学紀要*, 39, 265-271, 1990.
 - 8) T. S. Collett, U. Schwarz, and E. C. Sobel: The interaction of oculomotor cues and stimulus size in stereoscopic depth constancy. *Perception*, 20, 733-754, 1991.
 - 9) R. E. Kirk: *Experimental design: Procedures for the behavioral sciences*, 3rd ed. Brooks/Cole Publishing Company, Boston, 1995.
 - 10) 中溝幸夫, 近藤倫明: 融合性パーゼンスのヒステリシスと両眼の感覚運動的結合. *心理学研究*, 57, 220-227, 1986.
 - 11) S. K. Fisher and K. J. Cuiffrieda: Accommodation and apparent distance perception. *Perception*, 17, 609-621, 1988.
 - 12) J. Hochberg: Perception: II. Space and movement. *J. Z. Kling and L. A. Riggs (eds): Woodworth & Schlosberg's Experimental Psychology (revised ed)*. Methuen, London, 1984.
 - 13) J. M. Foley: Binocular distance perception. *Psychological Review*, 87, 411-433, 1980.
 - 14) J. M. Foley: Binocular distance perception: egocentric visual tasks. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 11, 133-149, 1985.

付録

(2)式の導出は、以下に示すとおりである。

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \frac{I}{D} \\ \vartheta_f &= \frac{I}{(D+d)} \\ D &= \frac{I}{\vartheta_n} = \frac{I}{\vartheta_f} - d \\ d &= \frac{I}{\vartheta_f} - \frac{I}{\vartheta_n} = \frac{I(\vartheta_n - \vartheta_f)}{\vartheta_n \times \vartheta_f} \\ d &\approx \frac{I \times \delta}{\vartheta^2} \end{aligned}$$